No. Date 06/03/19

Ελάχιστο πολυώνυμο

$A \Rightarrow \chi_A(\lambda)$ χαρακτηριστικό

$\rightarrow m_A(\lambda)$ ελάχιστο

A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ $m_A(\lambda) =$ γινόμενο διαφορετικών πρωτοβαθμίων πολυωνύμων

$m_A(A) = O_{n \times n}$

Πχ: Δίνεται ο ενδομορφισμός $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο:

$$T(x,y,z,w) = (2x+y,\ 2y,\ z+w,\ -2z+4w)$$

Να βρεθεί το ελάχιστο & χαρακτηριστικό πολυώνυμο του T. Αν A είναι ο πίνακας του T ως προς την κανονική βάση, νδο: $A^6 - 7A^5 + 16A^4 - 10A^3 - 14A^2 + 33A - 23I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)^2 \left[(\lambda-4)(\lambda-1)+2\right] =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)$

πιθανά ελάχιστα $m_A(\lambda)$: $(\lambda-2)(\lambda-3)$

$(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

$(\lambda-2)^3(\lambda-3)$

$$(A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{n \times n}$$

$\Rightarrow$ A <u>ΔΕΝ</u> διαγωνοποιείται.

$$(A-2I)\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow m_A(\lambda)=\chi_A(\lambda)$$

$$f(x)=x^6-7x^5+16x^4-10x^3-14x^2+33x-23$$

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)=(\lambda^3-3\lambda^2\cdot 2+3\lambda\cdot 4-8)(\lambda-3)=$$

$$=\lambda^4-6\lambda^3+12\lambda^2-8\lambda-3\lambda^3+18\lambda^2-36\lambda+24=$$

$$=\lambda^4-9\lambda^3+30\lambda^2-44\lambda+24$$

$$f(x)=\chi_A(x)\pi(x)+u(x) \quad \begin{cases} u(x)=0 \\ \deg u(x)<\deg(\chi_A(x)) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^6-7x^5+16x^4-10x^3-14x^2+33x-23 & x^4-9x^3+30x^2-44x+24 \\ \hline
-x^6+9x^5-30x^4+44x^3-24x^2 & x^2+2x+4 \\ \hline
2x^5-14x^4+34x^3-24x^2 & \\
-2x^5+18x^4-60x^3+88x^2-48x & \\ \hline
4x^4-26x^3+50x^2-15x-23 & \\
-4x^4+36x^3-120x^2+176x-96 & \\ \hline
10x^3-70x^2+161x-119 &
\end{array}$$

$$f(A)=\chi_A(A)\pi(A)+u(A)=u(A)$$

$$u(A)=10x^3-70x^2+161x-119\ldots$$

$$u(A)=10A^3-70A^2+161A-119I=\ldots$$

Εκθετική δύναμη πίνακα

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$A\in M(n\times n,\mathbb{R}) \qquad \Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^k\end{pmatrix}$$

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\ldots$$

$$e^\Lambda=I+\Lambda+\frac{\Lambda^2}{2!}+\frac{\Lambda^3}{3!}+\ldots=\Big(1+\lambda_1+\frac{\lambda_1^2}{2!}+\frac{\lambda_1^3}{3!}+\ldots+\ldots$$

$$+\,1+\lambda_n+\frac{\lambda_n^2}{2!}+\frac{\lambda_n^3}{3!}+\ldots\Big)$$

$$e^{\Lambda} = I + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2!} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Υποθέτω ότι $A = P\Lambda P^{-1}$ διαγωνοποιείται με Λ διαγώνιο

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = \cancel{(2-\lambda)(3-\lambda+1)(}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = (2-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 4$

• $V(2)$: $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 0x+0y+0z=0 \\ x-z=0 \\ -x+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y\in\mathbb{R} \\ x=z \end{matrix}$$

$(x,y,z) = (x,y,x) = x(1,0,1) + y(0,1,0)$

$V(2) = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle \Rightarrow \dim V(2) = 2 =$ πολ/τητα της $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

• $V(4)$: $(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x-z=0 \\ -2y=0 \\ -x-z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ x=-z \end{matrix}$$

$(x,y,z) = (x,0,-x) = x(1,0,-1)$ Άρα $V(4) = \langle (1,0,-1) \rangle$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P\Lambda P^{-1} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^{m+2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Άσκηση 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 2)(\lambda^2 - 3) =$$

$$= (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3})$$

$\Rightarrow A$ διαγωνοποιείται.

Άσκηση 3

AB κ' BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Έστω λ μια ιδιοτιμή του AB.

$\exists\, u \in \mathbb{R}^n$ με $u \neq \bar{0}$ κ' $ABu = \lambda u$.

$\lambda = 0 \qquad AB \cdot u = 0 \cdot u = \bar{0}$

$\lambda = 0 \Rightarrow \det AB = 0 \Rightarrow \det A \det B = 0 \Rightarrow \det B \det A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(BA)=0 \Rightarrow$ γινόμενο των ιδιοτιμών του BA είναι 0.
Άρα τουλάχιστον 1 είναι 0.
Όλες οι ιδιοτιμές του AB είναι $\neq 0$
$ABu=\lambda u \neq \bar{0} \Rightarrow BA(Bu)=B(\lambda u)=\lambda(Bu) \Rightarrow Bu\neq\bar{0}$
$BA(Bu)=\lambda(Bu) \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA

Άσκηση 4

$A\in M(n\times n,\mathbb{R}) \quad \forall x\in M(n\times n,\mathbb{R}) \quad x\neq\bar{0}$

$A.x=\lambda x \Rightarrow Ax-\lambda x=\bar{0} \Rightarrow (A-\lambda I)x=\vec{0} \quad \forall x\neq\vec{0}$

$\Rightarrow A-\lambda I=O_{n\times n} \Rightarrow A=\lambda I$ γιατί:

πχ: έστω $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases} a_{11}=\lambda\\ a_{21}=0\\ a_{31}=0\end{cases}$$

Άσκηση 5:

$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 2 & a & -2\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ θέλω a τ.ω. $\lambda_1=\lambda_2=1$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & -2\\ 2 & a-\lambda & -2\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 0\\ 2 & a-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(a-\lambda)\left[(3-\lambda)(a-\lambda)-0\right]=(a-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1=\lambda_2=a$
$\lambda_3=3$

Άρα $\chi_A(1)=0$ κ' το $(\lambda-1)^2$ διαιρεί το $\chi_A(\lambda)$
$\chi_A(1)=0 \Rightarrow (a-1)^2(3-1)=0 \Rightarrow \underline{a=1}$
A διαγ/μη για το a που θα βρω. $\Leftrightarrow \dim V(1)=2$
$(x-1)^2(x-\sqrt{2})(x+i)$

No. Date

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V(1): (A-1\cdot\lambda)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x-2z=0\\ 2x-2z=0\\ 0x+0y+0z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x=z\\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$(x,y,z)=(x,y,x)=x(1,0,1)+y(0,1,0)$

$V(1)=\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle \quad \dim V(1)=2$

$$V(3): (A-3\cdot\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2z=0\\ 2x-2y-2z=0\\ -2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}z=0\\ x=y\end{array}$$

$(x,y,z)=(x,x,0)=x(1,1,0) \quad V(3)=\langle(1,1,0)\rangle$

$\dim V(3)=1$

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$u_1=(0,1,0) \quad u_2=(1,0,1) \quad u_3=(1,1,0)$

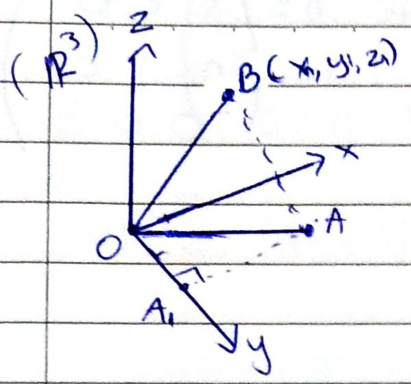
Date

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{не} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{кан. баз.} \arrow[d, "P^{-1}"] & \text{кан. баз.} \\
\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \arrow[r, "\Lambda"] & \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

No. Date



$OB^2 = OA^2 + \underbrace{AB^2}_{z_1^2} = x_1^2+y_1^2+z_1^2$

$OA_1 = y_1 \quad AA_1 = x_1$

$OA^2 = OA_1^2 + A_1A^2 = x_1^2+y_1^2$

SOS

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω V^n δ.χ. πάνω από το $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) μια απεικόνιση $\langle \_ , \_ \rangle : V\times V \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ καλείται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τις παρακάτω

ιδιότητες: 1) $\langle u_1+u_2, w\rangle = \langle u_1,w\rangle + \langle u_2,w\rangle$ $\quad u_1,u_2,w\in V$

2) $\langle au_1, w\rangle = a\langle u_1,w\rangle$ $\quad a\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

3) $\langle u,w\rangle = \langle w,u\rangle$ $\quad$ ($\langle u,w\rangle = \overline{\langle w,u\rangle}$ συζυγές)

4) $\langle u,u\rangle \geq 0$ & είναι $0 \iff u=\bar{0}$

πχ 1) $\mathbb{R}^n$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

$\langle (x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n =$

$= (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = (x_1\cdots x_n)(y_1\cdots y_n)^t$

πχ 2) $\mathbb{R}^2$ εξετάστε αν η απεικόνιση με τύπο:

$\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+2xy'+2yx'+5yy'$

αποτελεί εσωτερικό γινόμενο.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix} \qquad \underset{1\times2}{(x,y)}\,\underset{2\times2}{A}\,\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}$

1η ιδ.: $\langle (x_1,y_1)+(x_2,y_2),(x',y')\rangle = ((x_1,y_1)+(x_2,y_2))A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} =$

$= (x_1,y_1)A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + (x_2,y_2)A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} =$

$= \langle (x_1,y_1),(x',y')\rangle + \langle (x_2,y_2),(x',y')\rangle$

2η ιδ: $<\lambda(x_1,y_1),(x_1',y_1')> = \lambda<(x_1,y_1),(x_1',y_1')>$

3η ιδ: $<(x_1,y_1),(x_2,y_2)> = (x_1,y_1)A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} =$

$= \left((x_1,y_1)A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}^t A\,(x_1,y_1)^t =$

$= \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} A\,(x_1,y_1) = <(x_2,y_2),(x_1,y_1)>$

4η ιδ: $<(x_1,y_1),(x_1,y_1)> = (x_1,y_1)A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = x_1^2+4x_1y_1+5y_1^2 =$

$= (x_1+2y_1)^2 + y_1^2 \geq 0$

Αν $(x_1+2y_1)^2 + y_1^2 = 0 \iff x_1+2y_1=0$ κ' $y_1=0 \Rightarrow x_1=y_1=0$

πχ: 3) Να εξεταστεί αν η απεικόνιση:

$<(x,y),(x',y')> = (x,y)\begin{pmatrix}8 & 3-3i\\ 3+3i & 5\end{pmatrix}(\bar{x}',\bar{y}')^t$ αποτελεί

εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^2$

$x,y,x',y' \in \mathbb{C}$. Επειδή η απεικόνιση είναι γινόμενο πινάκων, οι πρώτες ιδιότητες ισχύουν από τους πίνακες. Πρέπει νδο ισχύει η 4η

$<(u,v),(u,v)> = (u,v)\begin{pmatrix}8 & 3-3i\\ 3+3i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} =$ $\left(\begin{matrix}u=\alpha+\beta i\\ v=\gamma+\delta i\end{matrix}\right)$

$= (8u+v(3+3i), u(\overline{3+3i})+5v)\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{pmatrix} =$

$= 8u\bar{u} + \underbrace{v\bar{u}(3+3i) + u\bar{v}(\overline{3+3i})}_{2 \text{ φορές το πραγματικό μέρος του } v\bar{u}(3+3i)} + 5v\bar{v} =$

$= 8(\alpha^2+\beta^2) + 2\ldots + 5(\gamma^2+\delta^2) \geq 0$ <u>ΠΑΝΤΑ</u>

κ' $=0$ όταν $u=v=0$

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πραγματικός δχ V^n εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο καλείται <u>ευκλείδιος</u> χώρος

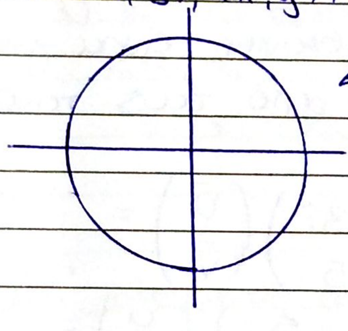
• **ΟΡΙΣΜΟΣ 2**: Έστω V^n δ.χ. εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $\langle -,- \rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ (Ε) 1) Ορίζω το μήκος ενός διανύσματος $v\in V$ να είναι ο αριθμός $\boxed{\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}}$

2) Σε έναν ευκλείδιο χώρο (R) ορίζω τη γωνία μεταξύ 2 διανυσ. να είναι: $\boxed{\cos\phi = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}}$ κ' $0\le\phi<\pi$,

ΠΡΟΣΟΧΗ:! πρέπει νδο $-1 \le \underbrace{\cos\phi}_{=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}} \le 1$

πχ: 1) Στον $\mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο να βρεθούν όλα τα διανύσματα μήκους 1. Ποιά είναι η γεωμετρική εικόνα αυτού του συνόλου;

Έστω $u=(x,y)$ κ' $\|u\|=1 \iff \sqrt{\langle u,u\rangle}=1 \iff \langle u,u\rangle=1$
$\Rightarrow \langle (x,y),(x,y)\rangle = 1 \Rightarrow x^2+y^2=1$



κ' κύκλος με κέντρο (0,0) κ' ακτίνα 1

2) Το ίδιο πρόβλημα στον $\mathbb{R}^3$ με εσωτερικό γινόμενο:
$\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+2xy'+2x'y+5yy'$
$\|u\|=1 \Rightarrow \langle u,u\rangle=1 \Rightarrow x^2+4xy+5y^2=1 \Rightarrow \boxed{(x+2y)^2+y^2=1}$
Πρέπει να ικανοποιείται αυτή η σχέση.

• **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1**: Η απόσταση μεταξύ 2 διανυσμάτων σε έναν ευκλείδιο χώρο δίνεται από: $\|u-v\|^2 = \langle (u-v),(u-v)\rangle \overset{1,2\,\iota\delta.}{=}$

$\langle u,v\rangle = \cos\phi\|u\|\|v\|$

$= \langle u,u-v\rangle - \langle v,u-v\rangle \overset{3,\iota\delta}{=} \langle u-v,u\rangle - \langle u-v,v\rangle \overset{1,2\,\iota\delta}{=}$
$= \langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 =$
$= \|u\|^2 - 2\cos\phi\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$ Νόμος συνημιτόνων

• ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2: Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\| \iff \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1 \iff$$

$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1$$

Γνωρίζω ότι $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

Θέτουμε $-v=w$ $\quad \|u+w\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,w\rangle + \|w\|^2$ ...

Έστω $\lambda z = w$ με $\lambda \neq 0$ πραγματικός αριθμός

$\|u+\lambda z\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda\langle u,z\rangle + \lambda^2\|z\|^2 \ge 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

Διακρίνουσα $\Delta_\lambda = 4|\langle u,z\rangle|^2 - 4\|u\|^2\|z\|^2 \le 0 \Rightarrow$

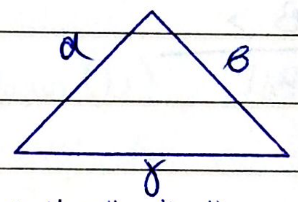
$\Rightarrow \cancel{4}\langle u,z\rangle \le \cancel{4}\|u\|^2\|z\|^2 \Rightarrow 1\langle u,z\rangle \le \|u\|\|z\|$

Να εξεταστεί τι γίνεται όταν $\Delta_\lambda = 0$;

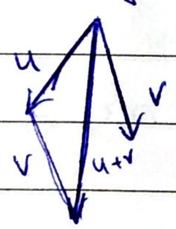
$\langle u,z\rangle = \|u\|^2\|z\|^2 \Rightarrow$

(Η ισότητα ισχύει όταν u, z, είναι συγγραμμικά

Η τριγωνική ιδιότητα



$\gamma \le \alpha + \beta$ μήκ. ευθ. τμημ.



$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ Ευκλείδια Γεωμετρία.

Έστω V ευκλείδιος χώρος κ' $u,v \in V$. Τότε ισχύει η τριγωνική ιδιότητα. Από τον νόμο των συνημιτόνων έχω:

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

$\cos\phi = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1 \Rightarrow \langle u,v\rangle \le \|u\|\cdot\|v\|$ $\Big\} \Rightarrow$ ....

$\Rightarrow \|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

Δηλ $\|u+v\|^2 \le (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$